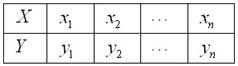
**Метод наименьших квадратов**

На заключительном уроке темы мы познакомимся с наиболее известным приложением [**ФНП**](http://mathprofi.ru/funkcija_dvuh_peremennyh_oblast_opredelenija_linii_urovnja.html), которое находит самое широкое применение в различных областях науки и практической деятельности. Это может быть физика, химия, биология, экономика, социология, психология и так далее, так далее. Волею судьбы мне часто приходится иметь дело с экономикой, и поэтому сегодня я оформлю вам путёвку в удивительную страну под названием **Эконометрика** =) …Как это не хотите?! Там очень хорошо – нужно только решиться! …Но вот то, что вы, наверное, определённо хотите – так это научиться решать задачи **методом наименьших квадратов**. И особо прилежные читатели научатся решать их не только безошибочно, но ещё и ОЧЕНЬ БЫСТРО ;-) Но сначала общая постановка задачи + сопутствующий пример:

Пусть в некоторой предметной области исследуются показатели http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image002.gif, которые имеют количественное выражение. При этом есть все основания полагать, что показатель http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image004.gif зависит от показателя http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image006.gif. Это полагание может быть как научной гипотезой, так и основываться на элементарном здравом смысле. Оставим, однако, науку в сторонке и исследуем более аппетитные области – а именно, продовольственные магазины. Обозначим через:

http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image006_0000.gif – торговую площадь продовольственного магазина, кв.м.,  
http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image004_0000.gif – годовой товарооборот продовольственного магазина, млн. руб.

Совершенно понятно, что чем больше площадь магазина, тем в большинстве случаев будет больше его товарооборот.

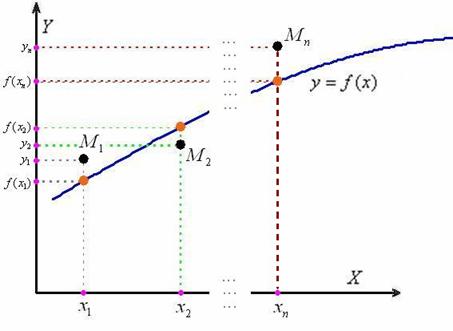
Предположим, что после проведения http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image008.gif наблюдений/опытов/подсчётов/танцев с бубном в нашем распоряжении оказываются числовые данные:  
  
С гастрономами, думаю, всё понятно: http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image012.gif – это площадь 1-го магазина, http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image014.gif – его годовой товарооборот, http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image016.gif – площадь 2-го магазина,  http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image018.gif – его годовой товарооборот и т.д. Кстати, совсем не обязательно иметь доступ к секретным материалам – довольно точную оценку товарооборота можно получить средствами [**математической статистики**](http://mathprofi.ru/matematicheskaya_statistika.html). Впрочем, не отвлекаемся, курс коммерческого шпионажа – он уже платный  =)

Табличные данные также можно записать в виде точек http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image020.gif и изобразить в привычной для нас [**декартовой системе**](http://mathprofi.ru/linejnaja_nezavisimost_vektorov_bazis_vektorov.html) http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image022.gif.

Ответим на важный вопрос: **сколько точек нужно для качественного исследования?**

Чем больше, тем лучше. Минимально допустимый набор состоит из 5-6 точек. Кроме того, при небольшом количестве данных в выборку нельзя включать «аномальные» результаты. Так, например, небольшой элитный магазин может выручать на порядки больше «своих коллег», искажая тем самым общую закономерность, которую и требуется найти!

Если совсем просто – нам нужно подобрать функцию http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image024.gif, [**график**](http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html) которой проходит как можно ближе к точкам http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image026.gif. Такую функцию называют ***аппроксимирующей****(аппроксимация – приближение)* или ***теоретической функцией***. Вообще говоря, тут сразу появляется очевидный «претендент» – многочлен высокой степени, график которого проходит через ВСЕ точки. Но этот вариант сложен, а зачастую и просто некорректен *(т.к. график  будет всё время «петлять» и плохо отражать главную тенденцию)*.

Таким образом, разыскиваемая функция должна быть достаточно простА и в то же время отражать зависимость адекватно. Как вы догадываетесь, один из методов нахождения таких функций и называется **методом наименьших квадратов**. Сначала разберём его суть в общем виде. Пусть некоторая функция http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image024_0000.gif приближает экспериментальные данные http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image020_0000.gif:  
  
Как оценить точность данного приближения? Вычислим http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image031.gif и разности (отклонения) http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image033.gif между экспериментальными и функциональными значениями *(изучаем чертёж)*. Первая мысль, которая приходит в голову – это оценить, насколько великА сумма http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image035.gif, но проблема состоит в том, что разности могут быть и отрицательны *(например, http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image037.gif)* и отклонения в результате такого суммирования будут взаимоуничтожаться. Поэтому в качестве оценки точности приближения напрашивается принять сумму [**модулей**](http://mathprofi.ru/goryachie_formuly.pdf) отклонений:

http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image039.gif или в свёрнутом виде: http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image041.gif *(вдруг кто не знает: http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image043.gif– это значок суммы, а http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image045.gif – вспомогательная переменная-«счётчик», которая принимает значения от 1 до http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image500.gif)*.

Приближая экспериментальные точки различными функциями, мы будем получать разные значения http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image041_0000.gif, и очевидно, где эта сумма меньше – та функция и точнее.

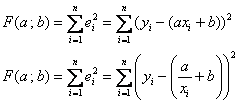
Такой метод существует и называется он *методом наименьших модулей*. Однако на практике получил гораздо бОльшее распространение *метод наименьших квадратов*, в котором возможные отрицательные значения ликвидируются не модулем, а возведением отклонений в квадрат:

http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image047.gif, после чего усилия направлены на подбор такой функции http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image024_0001.gif, чтобы сумма квадратов отклонений http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image049.gif была как можно меньше. Собственно, отсюда и название метода.

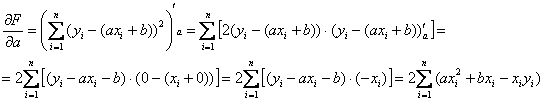
И сейчас мы возвращаемся к другому важному моменту: как отмечалось выше, подбираемая функция должна быть достаточно простА – но ведь и таких функций тоже немало: [***линейная***](http://mathprofi.ru/uravnenie_pryamoi_na_ploskosti.html)*,*[***гиперболическая***](http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html)*,*[***экспоненциальная***](http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html)*,*[***логарифмическая***](http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html)*,*[***квадратичная***](http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html) и т.д. И, конечно же, тут сразу бы хотелось «сократить поле деятельности». Какой класс функций выбрать для исследования? Примитивный, но эффективный приём:

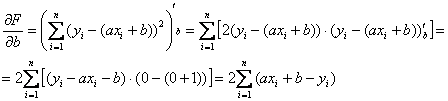
– Проще всего изобразить точки http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image026_0000.gif на чертеже и проанализировать их расположение. Если они имеют тенденцию располагаться по прямой, то следует искать [**уравнение прямой**](http://mathprofi.ru/uravnenie_pryamoi_na_ploskosti.html) http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image052.gif с оптимальными значениями http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image054.gif и http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image056.gif.  Иными словами, задача состоит в нахождении ТАКИХ коэффициентов http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image058.gif – чтобы сумма квадратов отклонений  http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image060.gif была наименьшей.

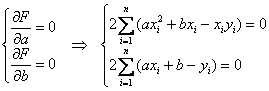
Если же точки расположены, например, по [**гиперболе**](http://mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html), то заведомо понятно, что линейная функция будет давать плохое приближение. В этом случае ищем наиболее «выгодные» коэффициенты http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image058_0000.gif для уравнения гиперболы http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image062.gif – те, которые дают минимальную сумму квадратов http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image064.gif.

А теперь обратите внимание, что в обоих случаях речь идёт о [**функции двух переменных**](http://mathprofi.ru/funkcija_dvuh_peremennyh_oblast_opredelenija_linii_urovnja.html), аргументами которой являются параметры разыскиваемых зависимостей:  


И по существу нам требуется решить стандартную задачу – найти [**минимум функции двух переменных**](http://mathprofi.ru/extremumy_funkcij_dvuh_i_treh_peremennyh.html).

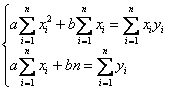
Вспомним про наш пример: предположим, что «магазинные» точки http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image020_0001.gif имеют тенденцию располагаться по прямой линии и есть все основания полагать наличие *линейной зависимости* http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image069.gif товарооборота от торговой площади. Найдём ТАКИЕ коэффициенты «а» и «бэ», чтобы сумма квадратов отклонений http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image071.gif была наименьшей. Всё как обычно – сначала [**частные производные 1-го порядка**](http://mathprofi.ru/chastnye_proizvodnye_primery.html). Согласно [**правилу линейности**](http://mathprofi.ru/tablica_proizvodnyh.pdf) дифференцировать можно прямо под значком суммы:  


Если хотите использовать данную информацию для реферата или курсовика – буду очень благодарен за поставленную ссылку в списке источников, такие подробные выкладки найдёте мало где:  


Составим стандартную систему:  


Сокращаем каждое уравнение на «двойку» и, кроме того, «разваливаем» суммы:  


***Примечание****: самостоятельно проанализируйте, почему «а» и «бэ» можно вынести за значок суммы. Кстати, формально это можно проделать и с суммой*http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image081.gif

Перепишем систему в «прикладном» виде:  
  
после чего начинает прорисовываться алгоритм решения нашей задачи:

Координаты точек http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image085.gif мы знаем? Знаем. Суммы http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image087.gif найти можем? Легко. Составляем простейшую[**систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными**](http://mathprofi.ru/kak_reshit_sistemu_uravnenii.html)(«а» и «бэ»). Систему решаем, например, [**методом Крамера**](http://mathprofi.ru/pravilo_kramera_matrichnyi_metod.html), в результате чего получаем стационарную точку http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image089.gif. Проверяя [**достаточное условие экстремума**](http://mathprofi.ru/extremumy_funkcij_dvuh_i_treh_peremennyh.html), можно убедиться, что в данной точке функция http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image091.gif достигает именно [**минимума**](http://mathprofi.ru/extremumy_funkcij_dvuh_i_treh_peremennyh.html). Проверка сопряжена с дополнительными выкладками и поэтому оставим её за кадром *(при необходимости недостающий кадр можно посмотреть*[***здесь***](http://www.cleverstudents.ru/articles/mnk.html)*)*. Делаем окончательный вывод:

Функция http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image093.gif наилучшим образом *(по крайне мере, по сравнению с любой другой линейной функцией)* приближает экспериментальные точки http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image026_0001.gif. Грубо говоря, её график проходит максимально близко к этим точкам. В традициях **эконометрики**полученную аппроксимирующую функцию также называют ***уравнением пАрной линейной регрессии***.

Рассматриваемая задача имеет большое практическое значение. В ситуации с нашим примером, уравнение http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image093_0000.gif позволяет прогнозировать, какой товарооборот *(«игрек»)* будет у магазина при том или ином значении торговой площади *(том или ином значении «икс»)*. Да, полученный прогноз будет лишь прогнозом, но во многих случаях он окажется достаточно точным.

Я разберу всего лишь одну задачу с «реальными» числами, поскольку никаких трудностей в ней нет – все вычисления на уровне школьной программы 7-8 класса. В 95 процентов случаев вам будет предложено отыскать как раз линейную функцию, но в самом конце статьи я покажу, что ничуть не сложнее отыскать уравнения оптимальной гиперболы, экспоненты и некоторых других функций.

По сути, осталось раздать обещанные плюшки – чтобы вы научились решать такие примеры не только безошибочно, но ещё и быстро. Внимательно изучаем стандарт:

Таким образом, получаем следующую [**систему**](http://mathprofi.ru/kak_reshit_sistemu_uravnenii.html):  
http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image116.gif

Тут можно умножить второе уравнение на 3 и [**из 1-го уравнения почленно вычесть 2-е**](http://mathprofi.ru/kak_reshit_sistemu_uravnenii.html). Но это везение – на практике системы чаще не подарочны, и в таких случаях спасает [**метод Крамера**](http://mathprofi.ru/pravilo_kramera_matrichnyi_metod.html):  
http://mathprofi.ru/b/metod_naimenshih_kvadratov_clip_image118.gif, значит, система имеет единственное решение.

